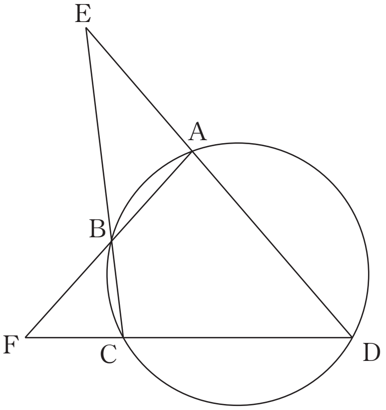
第 7 講　円の性質

PART1　方べきの定理

1　円に内接する四角形 ABCD があり，$AD=5$，$BC=2$ である。また，直線 AD と直線 BC の交点を E, 直線 AB と直線 CD の交点を F とすると，$AE=3$，$CF=2$ である。このとき，次の問いに答えよ。



(1)　BE の長さを求めよ。

(2)　CD の長さを求めよ。

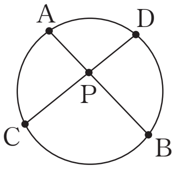
(3)　$\angle E$ の二等分線と直線 CD との交点を G とし，$\angle F$ の二等分線と直線 EG の交点を H，直線 AD との交点を I とするとき，FH : HI を求めよ。

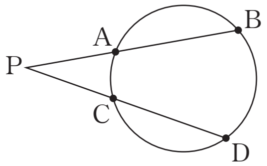
Point Pickup

右図において，方べきの定理

$$PA\cdot PB=PC\cdot PD$$

が成り立つことは，円周角の定理および円に内接する四角形の性質より，三角形の相似を用いて証明することができる。

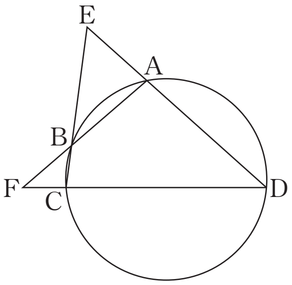




方べきの定理を用いない場合も，相似な三角形に着目するとよい場面がある。

第 7 講　PART1　確認問題

1 円に内接する四角形 ABCD があり，$AD=4$，$CD=5$ である。また，直線 AD と直線 BC の交点を E，直線 AB と直線 CD の交点を F とすると，$AE=2$，$BE=3$ である。
このとき，次の問いに答えよ。



(1) BC の長さを求めよ。

$BC=$ ア

(2) CF の長さを求めよ。

$CF=$ イ

(3) $\angle E$ の二等分線と直線 CD との交点を G とし，$\angle F$ の二等分線と直線 EG との交点を H，直線 AD との交点を I とするとき，FI : HI を求めよ。ただし，最も簡単な整数の比で答えよ。

FI : HI = ウ : エ

第7講　円の性質

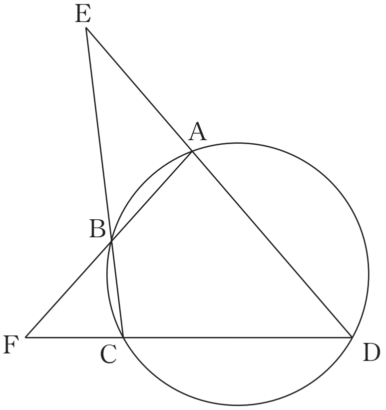
PART1　方べきの定理

1 円に内接する四角形ABCDがあり，AD＝5，BC＝2である。また，直線ADと直線BCの交点をE，直線ABと直線CDの交点をFとすると，AE＝3，CF＝2である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) BEの長さを求めよ。

(2) CDの長さを求めよ。

(3) ∠Eの二等分線と直線CDとの交点をGとし，∠Fの二等分線と直線EGの交点をH，直線ADとの交点をIとするとき，FH：HIを求めよ。



(1) 方べきの定理より EA・ED＝EB・EC

BE＝x とすると　$3\cdot(3+5)=x\cdot(x+2)$　　$x^2+2x-24=0$　　$(x+6)(x-4)=0$

$x>0$ より $x=4$　　よって　BE＝4

(2) △ECDと直線AFにメネラウスの定理を用いると

$$\frac{DF}{FC}\cdot\frac{CB}{BE}\cdot\frac{EA}{AD}=1 \qquad \frac{DF}{2}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5}=1 \qquad DF=\frac{20}{3}$$

よって　$CD=DF-FC=\frac{20}{3}-2=\frac{14}{3}$

(3) △ECDにおいて，角の二等分線の性質より

$$CG:GD=EC:ED=(4+2):8=3:4$$

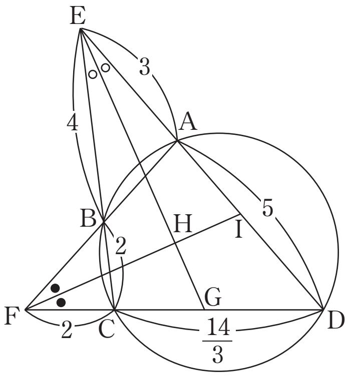
$$CG=\frac{3}{3+4}CD=\frac{3}{7}\cdot\frac{14}{3}=2$$

ここで，△FDA∽△FBCであるから

FA：FC＝AD：CB

FA：2＝5：2

FA＝5



よって，△FDA において，角の二等分線の性質より

$$\mathrm{AI}:\mathrm{ID}=\mathrm{FA}:\mathrm{FD}=5:\frac{20}{3}=3:4$$

$$\mathrm{AI}=\frac{3}{3+4}\mathrm{AD}=\frac{3}{7}\cdot 5=\frac{15}{7}$$

したがって，△FDI と直線 EG にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{EI}}\cdot\frac{\mathrm{IH}}{\mathrm{HF}}\cdot\frac{\mathrm{FG}}{\mathrm{GD}}=1 \qquad \frac{5+3}{3+\frac{15}{7}}\cdot\frac{\mathrm{IH}}{\mathrm{HF}}\cdot\frac{2+2}{\frac{14}{3}-2}=1 \qquad \frac{\mathrm{IH}}{\mathrm{HF}}=\frac{3}{7}$$

であるから，FH：HI＝7：3

第 7 講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] ア：1，イ：1，ウ：8，エ：3

[解説]

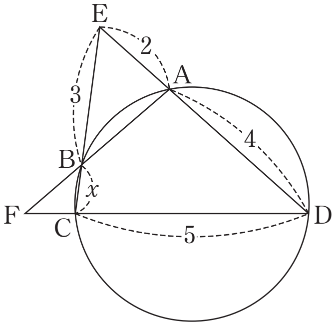
(1)　方べきの定理より

$$\mathrm{EA}\cdot\mathrm{ED}=\mathrm{EB}\cdot\mathrm{EC}$$ [A]

BC $=x$ とすると，EC $=$ EB $+$ BC $=3+x$ より

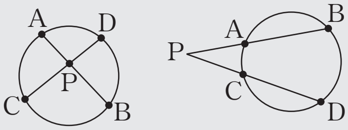
$$2\cdot(2+4)=3\cdot(3+x)$$

よって　$x=1$　すなわち　BC $=\mathbf{1}$



[A]　方べきの定理

$$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}$$



(2)　△CDE と直線 AF にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{FC}}\cdot\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{BE}}\cdot\frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{AD}}=1$$ [B]

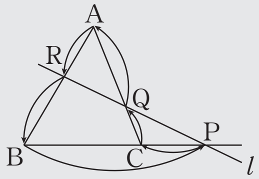
$$\frac{5+\mathrm{CF}}{\mathrm{CF}}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}=1$$

よって　$5+\mathrm{CF}=6\mathrm{CF}$

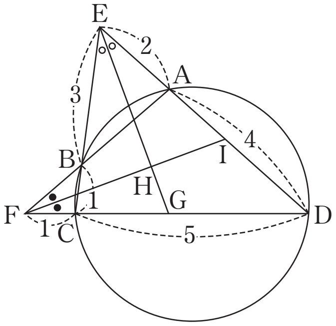
ゆえに　CF $=\mathbf{1}$

[B]　メネラウスの定理

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$



(3)



△CDE において，角の二等分線の性質より

$$\mathrm{CG}:\mathrm{GD}=\mathrm{EC}:\mathrm{ED}=4:6=2:3$$ [C]

よって　$\mathrm{CG}=\dfrac{2}{2+3}\mathrm{CD}=\dfrac{2}{5}\cdot 5=2$

ここで，△FDA∽△FBC であるから

$$\mathrm{FA}:\mathrm{FC}=\mathrm{AD}:\mathrm{CB}$$

$$\mathrm{FA}:1=4:1 \qquad \text{ゆえに} \quad \mathrm{FA}=4$$

よって，△FDA において，角の二等分線の性質より

$$\mathrm{AI}:\mathrm{ID}=\mathrm{FA}:\mathrm{FD}=4:6=2:3$$ [C]

ゆえに　$\mathrm{AI}=\dfrac{2}{2+3}\mathrm{AD}=\dfrac{2}{5}\cdot 4=\dfrac{8}{5}$

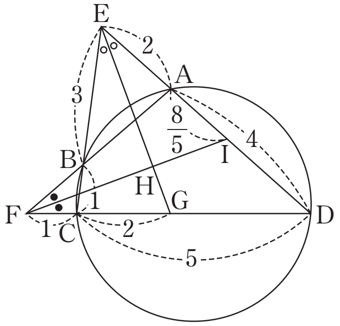
したがって，△FDI と直線 EG にメネラウスの定理を用いると

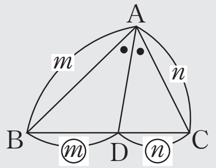
$$\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{EI}}\cdot\frac{\mathrm{IH}}{\mathrm{HF}}\cdot\frac{\mathrm{FG}}{\mathrm{GD}}=1$$ [B]

$$\frac{6}{2+\frac{8}{5}}\cdot\frac{\mathrm{IH}}{\mathrm{HF}}\cdot\frac{1+2}{5-2}=1$$

よって　$\dfrac{\mathrm{IH}}{\mathrm{HF}}=\dfrac{3}{5}$

ゆえに　$\mathrm{FI}:\mathrm{HI}=(5+3):3=\mathbf{8:3}$



[C]　角の二等分線の性質

△ABC において，AD が ∠A の二等分線のとき　BD : DC = AB : AC